RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 gennaio 1918.

F. D'Ovidio, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle varietà a tre dimensioni dotate di terne principali di congruenze geodetiche.* Nota II del Socio Gregorio Ricci.

5. È facile dimostrare che se in una V_3 esiste una terna ortogonale di congruenze ψ_h, per la quale tutte le rotazioni ϱ_{hk} siano costanti, della stessa proprietà godono tutte le terne, che da essa si traggono mediante una qualunque sostituzione ortogonale a coefficienti costanti e che, per effetto di una tale sostituzione, le ϱ_{hk} si comportano come i coefficienti di una forma bilineare covariante. Le V_3 dotate di quella proprietà (nelle quali evidentemente rientrano come caso particolare le V_3 della II^a classe) assieme alle terne principali (in generale una sola) caratterizzate dalle equazioni

$$\omega_{h+1\,h+2} = \omega_{h+2\,h+1} = 0\,,$$

che potremo chiamare *terne principali di 1^a specie*, ammettono dunque altre terne speciali (e in generale una sola) caratterizzate dalle equazioni

$$\varrho_{h+1\,h+2} + \varrho_{h+2\,h+1} = 0\,,$$

che chiameremo *terne principali di 2^a specie.*

Dimostreremo che per le V_3 della II^a classe le terne principali di 2^a specie sono anche terne principali di I^a specie e che tale proprietà spetta esclusivamente ad esse (di cui sono un caso particolare le varietà a curvatura costante positiva) ed alle varietà a curvatura costante negativa o nulla.

Fatte le posizioni

$$2\sigma_h = \varrho_{h+1\,h+2} + \varrho_{h+2\,h+1} \quad , \quad 2\delta_h = \varrho_{h+1\,h+2} - \varrho_{h+2\,h+1}$$

dalla (3) della Nota I[a] si traggono facilmente le

$$\omega_{h+1\,h+2} = \quad 2\varrho_{h+1}\,\delta_h + 2\varrho_h\,\sigma_h - 2\varrho_{h+2\,h}\,\sigma_{h+2}$$
$$\omega_{h+2\,h+1} = -\,2\varrho_{h+2}\,\delta_h + 2\varrho_h\,\sigma_h - 2\varrho_{h+1\,h}\,\sigma_{h+1}$$
$$\omega_h = 2\,.\,\varrho_{h+1}\,\varrho_{h+2} - 2\Sigma_i\,\delta_i^2 - 2\sigma_h^2 + 2\delta_{h+2}\,\sigma_{h+2} - 2\delta_{h+1}\,\sigma_{h+1}\,.$$

Per le terne principali di 2[a] specie abbiamo dunque in particolare

$$\omega_{h+1\,h+2} = \quad 2\varrho_{h+1}\,\delta_h$$
$$\omega_{h+2\,h+1} = -\,2\varrho_{h+2}\,\delta_h$$
$$\omega_h = 2\varrho_{h+1}\,\varrho_{h+2} - 2\Sigma_i\,\delta_i^2\,.$$

Ne segue che le equazioni (B) della Nota I assumono la forma notevole

$$\alpha_h\,\delta_h = 0\,,$$

e che una terna principale di 2[a] specie è anche terna principale di 1[a] specie nei seguenti casi soltanto:

1°. Se è $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$, cioè se si tratta di V_3 della II[a] classe.

2°. Se è $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = 0$, nel qual caso risulta $\omega_h = -\,2\Sigma_i\,\delta_i^2$.

3°. Se si annullano due rotazioni ϱ_h e le corrispondenti δ_h, per esempio, se è $\varrho_2 = \varrho_3 = \delta_2 = \delta_3 = 0$, nel qual caso risulta $\omega_h = -\,2\delta_1^2$.

6. Come segue dalle (4) (Nota I) le V_3 della II[a] classe hanno costanti gli invarianti e quindi le curvature riemanniane principali. Non è però vera la proposizione inversa; e ci proponiamo ora per prima cosa di stabilire a quali condizioni gli invarianti principali di una V_3 supposti costanti devano ancora soddisfare perchè le V_3 stesse, ammettendo una terna principale di congruenze geodetiche, appartengano alla II[a] classe. Di più stabiliremo tali criterî, che, dati i valori numerici degli invarianti principali di una V_3 della II[a] classe, ci consentano di riconoscere a quale appartenga delle tre sottoclassi, nelle quali la abbiamo suddivisa, con criterî desunti dai valori numerici delle tre anormalità spettanti alle singole congruenze geodetiche principali.

Risulta ancora dalle equazioni (4), che le V_3 della II[a] classe hanno due invarianti principali nulli, o non ne hanno alcuno.

Cominciamo dal considerare il primo caso e sia:

$$\omega_1 = \omega_2 = 0 \ ; \ \omega_3 \neq 0\,.$$

Dalle (4) seguono in tali ipotesi le

$$\varrho_3 = 0 \ , \ 2\varrho_1\,\varrho_2 = \omega_3\,.$$

In questo caso, dati gli invarianti principali, rimane dunque indeterminata la anormalità $\alpha_3 = \varrho_1 + \varrho_2$, la quale potrà supporsi positiva o nulla purchè tale che le rotazioni ϱ_1 e ϱ_2 risultino reali. E poichè essa, come si potrebbe dimostrare e come lascia supporre il suo significato, è invariante di fronte ad ogni sostituzione ortogonale, che si eseguisca sulle congruenze ψ_1 e ψ_2, a valori diversi di α_3 corrispondono delle V_3 intrinsecamente distinte.

Per conseguenza il caso, che stiamo studiando, si suddivide in due distinti secondo che è

$$\omega_1 = \omega_2 = 0 \; , \; \omega_3 > 0 \; , \; \alpha_3 = c^2 ,$$

essendo $c^2 > 2\omega_3$; ovvero

$$\omega_1 = \omega_2 = 0 \; , \; \omega_3 < 0 \; , \; \alpha_3 = c^2 ,$$

essendo $c^2 \geq 0$. E poichè nel primo caso ϱ_1 e ϱ_2 risultano entrambi positive e di segni opposti nel secondo, si conclude che si tratta rispettivamente di V_3 della 2ª e della 3ª sottoclasse.

7. Se tutti gli invarianti principali e quindi tutte le rotazioni sono diverse da 0, dalle (4) seguono le

$$\varrho_h^2 = \frac{\omega_{h+1}\,\omega_{h+2}}{2\omega_h} , \tag{4'}$$

per le quali in funzione degli invarianti principali risultano determinati i valori assoluti delle ϱ_h. Esse ci dicono che il caso, che ora esaminiamo, si può suddividere in due e cioè:

a) se tutti gli invarianti principali sono positivi;

b) se un invariante principale è positivo e due sono negativi.

Le (4) ci dicono poi che nel caso *a*) tutte le ϱ_h, e quindi le α_h, si possono assumere positive, che cioè si tratta di varietà appartenenti alla sottoclasse 2ª.

Nel caso *b*) invece due rotazioni devono essere assunte positive ed una negativa o viceversa. Secondo le uguaglianze o disuguaglianze possibili tra i valori assoluti degli invarianti principali esso si scinde negli otto casi seguenti, che conviene separatamente esaminare.

b_1) I tre invarianti principali hanno valori assoluti eguali.

Suppongasi $\omega_3 = -\omega_1 = -\omega_2$. Per le (4) sarà $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Si tratta dunque di varietà della sottoclasse 1ª.

b_2) I due invarianti negativi sono eguali ed in valore assoluto maggiori del positivo.

Suppongasi $-\omega_3 = -\omega_2 > \omega_1 > 0$. Si possono assumere $\varrho_1 > 0$, $\varrho_2 = \varrho_3 < 0$ e risultano così $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$. Si tratta dunque di varietà della sottoclasse 3ª.

b_3) I due invarianti negativi sono eguali e minori in valore assoluto del positivo.

Suppongasi $\omega_3 > -\omega_2 = -\omega_1$. Si possono assumere $\varrho_1 = \varrho_2 > -\varrho_3$, $-\varrho_3 > 0$ e risultano allora positive tutte le anormalità. Queste varietà appartengono dunque alla sottoclasse 2ª.

b_4) I due invarianti negativi hanno valori assoluti diversi, e il minore dei loro valori assoluti è uguale all' invariante positivo.

Sia $-\omega_3 > -\omega_2 = \omega_1$. Sarà $\alpha_3 = \varrho_2 + \varrho_1 = 0$ e potremo assumere $\varrho_1 = -\varrho_2 > -\varrho_3 > 0$, donde $\alpha_2 > 0$, $\alpha_1 < 0$. Si tratta di varietà della 3ª sottoclasse.

b_5) I due invarianti negativi hanno valori diversi, e il maggiore dei loro valori assoluti eguaglia l' invariante positivo.

Sia $\omega_3 = -\omega_2 > -\omega_1 > 0$. Sarà $\alpha_1 = \varrho_2 + \varrho_3 = 0$ e potremo assumere $\varrho_1 > \varrho_2 = -\varrho_3 > 0$, donde $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$. Si tratta di varietà della sottoclasse 2ª.

b_6) I tre invarianti principali hanno valori assoluti distinti, e il positivo ha il valore assoluto minimo.

Sia $-\omega_2 > -\omega_3 > \omega_1 > 0$; e si assumano ϱ_1 positivo, ϱ_2 e ϱ_3 negativi. Sarà $\varrho_1 > -\varrho_3 > -\varrho_2 > 0$, e quindi $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$. Si tratta di varietà della sottoclasse 3ª.

b_7) I tre invarianti principali hanno valori assoluti distinti e il positivo è compreso tra i valori assoluti dei negativi.

Sia $-\omega_2 > \omega_3 > -\omega_1 > 0$, e si assumano ϱ_1 e ϱ_2 positivi, ϱ_3 negativo. Sarà $\varrho_1 > -\varrho_3 > \varrho_2 > 0$, cioè $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$. Si tratta ancora di varietà della sottoclasse 3ª.

b_8) I tre invarianti principali hanno valori assoluti distinti e il positivo supera in valore assoluto i due negativi.

Sia $\omega_3 > -\omega_1 > -\omega_2 > 0$, e si assumano ϱ_1 e ϱ_2 positivi, ϱ_3 negativo. Sarà $\varrho_2 > \varrho_1 > -\varrho_3 > 0$ e quindi $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$, e si tratterà di varietà della sottoclasse 2ª.

Riassumendo concludiamo che:

« Costituiscono la classe IIª quelle V_3, le cui curvature riemanniane « principali sono costanti e tali che uno degli invarianti principali risulti « negativo e gli altri due nulli; ovvero, uno degli invarianti principali es- « sendo positivo, gli altri due risultino insieme nulli o dello stesso segno ».

In particolare:

« La 1ª sottoclasse è costituita dalle V_3, i cui invarianti principali « eguali in valore assoluto sono uno positivo e due negativi.

« La 2ª dalle V_3, i cui invarianti principali sono tutti positivi e da « quelle per le quali uno solo di tali invarianti è positivo, mentre degli « altri due (insieme negativi o nulli) nessuno lo supera e uno al più lo « eguaglia in valore assoluto.

« La 3ª dalle V_3, che ammettono un invariante principale negativo e « due nulli, e da quelle, che ammettono un invariante principale positivo e « due negativi, il primo essendo in valore assoluto minore di uno almeno « di questi ».

Alla 2ª sottoclasse appartengono in particolare le varietà a curvatura costante positiva.

8. Poichè per le varietà della classe IIª le rotazioni ϱ_h sono costanti le equazioni (β) del § 2 sono identicamente soddisfatte e quindi le equazioni (α) sono completamente integrabili. Di più, per quanto fu dimostrato nella Nota precedente, fissati i valori delle ϱ_h o, per essi, quelli degli invarianti principali, la corrispondente V_3 è intrinsecamente determinata e per ottenerne la determinazione analitica intrinseca basta determinare per le (α) un sistema integrale particolare qualunque purchè tale che il determinante

$$\lambda = (\lambda_{1/1}\,\lambda_{2/2}\,\lambda_{3/3})$$

risulti diverso da 0.

Cominciamo dal fare ciò per le varietà della 1ª sottoclasse:

$$(\alpha_1 = \alpha_2 = 0\ .\ \alpha_3 > 0).$$

Per queste assumeremo

$$\psi_1 = dx_1\ ,\ \psi_2 = dx_2$$

cioè

$$\lambda_{1/1} = \lambda_{2/2} = 1\quad;\quad \lambda_{1/2} = \lambda_{1/3} = \lambda_{2/1} = \lambda_{2/3} = 0\,.$$

Risulterà

$$\lambda = \lambda_{3/3}$$

e, assunto ancora

$$\lambda_{3/1} = 0\,,$$

rimarranno da determinare $\lambda_{3/2}$ e $\lambda_{3/3}$ in modo che, essendo $\lambda_{3/3} \neq 0$, siano soddisfatte le equazioni

$$\frac{\partial\lambda_{3/2}}{\partial x_3} - \frac{\partial\lambda_{3/3}}{\partial x_2} = 0\ ,\ \frac{\partial\lambda_{3/3}}{\partial x_1} = 0\ ,\ \frac{\partial\lambda_{3/2}}{\partial x_1} = -\,\alpha_3\,.$$

Ciò poi si ottiene assumendo

$$\lambda_{3/2} = -\,\alpha_3 x_1\ ,\ \lambda_{3/3} = 1$$

e quindi

$$\psi_3 = -\,\alpha_3 x_1\, dx_2 + dx_3\,.$$

Dunque

$$ds^2 = dx_1^2 + (1 + \alpha_3^2 x_1^2)\, dx_2^2 + dx_3^2 - 2\,\alpha_3\, x_1\, dx_2\, dx_3\,,$$

essendo α_3 costante positiva, è una espressione canonica del ds^2 delle varietà della 1ª sottoclasse.

Le equazioni immediatamente integrabili delle loro congruenze principali sono poi:

$$dx_2 = 0\ ,\ dx_3 = 0\ ;\ dx_1 = 0\ ,\ dx_2 = \alpha_3 x_1 dx_2\ ;\ dx_1 = 0\ ,\ dx_2 = 0\,.$$

In fine, come risulta dalle (4),

$$\omega_3 = -\omega_1 = -\omega_2 = \frac{1}{2}\alpha_3^2$$

sono le espressioni dei loro invarianti principali e quindi

$$\omega_{11} = \omega_{22} = \frac{1}{4}\alpha_3^2\quad,\quad \omega_{33} = -\frac{3}{4}\alpha_3^2$$

quelle delle loro curvature principali riemanniane.

Essendo in questo caso $\omega_{11} = \omega_{22} \neq \omega_{33}$ $\varrho_1 = \varrho_2$ riconosciamo che le varietà di questa classe ammettono un gruppo a quattro parametri di movimenti rigidi.

9. Passiamo a considerare la sottoclasse 2ª $(\alpha_1 \geq 0\ ,\ \alpha_2 > 0\ ,\ \alpha_3 > 0)$ cominciando dal supporre $\alpha_1 = 0$. Potremo porre

$$\psi_1 = dx_1$$

cioè

$$\lambda_{1/1} = 1\ ,\ \lambda_{1/2} = \lambda_{1/3} = 0\,.$$

Sarà così

$$\lambda = \lambda_{2/2}\lambda_{3/3} - \lambda_{2/3}\lambda_{3/2}$$

e, posto ancora

$$\lambda_{2/1} = \lambda_{3/1} = 0\,,$$

rimarranno da determinare $\lambda_{2/2}, \lambda_{2/3}, \lambda_{3/2}$, e $\lambda_{3/3}$ in suolo che risulti $\lambda \neq 0$ e siano soddisfatte le equazioni

$$(\alpha_0)\ \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\lambda_{2/2}}{\partial x_3} - \frac{\partial\lambda_{2/3}}{\partial x_2} = 0\ ,\ \frac{\partial\lambda_{3/3}}{\partial x_1} = \alpha_2\lambda_{3/3}\ ,\ \frac{\partial\lambda_{2/2}}{\partial x_1} = \alpha_2\lambda_{3/2} \\ &\frac{\partial\lambda_{3/2}}{\partial x_3} - \frac{\partial\lambda_{3/3}}{\partial x_2} = 0\ ,\ \frac{\partial\lambda_{3/3}}{\partial x_1} = -\alpha_3\lambda_{2/3}\ ,\ \frac{\partial\lambda_{3/2}}{\partial x_1} = -\alpha_3\lambda_{2/2}\,. \end{aligned}\right.$$

Ciò si ottiene ponendo

$$\theta = \sqrt{\alpha_2\alpha_3}\,x_1\ \text{(1)}$$

$$\sqrt{\alpha_3}\,\lambda_{2/2} = \cos\theta\ ,\ \sqrt{\alpha_3}\,\lambda_{2/3} = -\sin\theta$$
$$\sqrt{\alpha_2}\,\lambda_{3/2} = -\sin\theta\ ,\ \sqrt{\alpha_2}\,\lambda_{3/3} = -\cos\theta\,.$$

(1) Qui ed in seguito per i radicali quadratici si intenderanno scelti i loro valori positivi.

Si hanno così per ψ_2 e ψ_3 (cambiando, come è permesso, il segno di ψ_3) le espressioni:

$$\sqrt{\alpha_3}\cdot\psi_2 = \cos\theta\, dx_2 - \sin\theta\, dx_3 \;,\; \sqrt{\alpha_3}\,\psi_3 = \sin\theta\, dx_2 + \cos\theta\, dx_3 ,$$

e per il ds^2 delle varietà di questa classe vale quindi la espressione canonica:

$$ds^2 = dx_1^2 + \left(\frac{\sin^2\theta}{\alpha_2} + \frac{\cos^2\theta}{\alpha_3}\right) dx_2^2 + \left(\frac{\sin^2\theta}{\alpha_3} + \frac{\cos^2\theta}{\alpha_2}\right) dx_3^2$$
$$+ \left(\frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_3}\right) \sin 2\theta\, dx_2\, dx_3 .$$

Le equazioni delle congruenze principali, anche in questo caso immediatamente integrabili, sono:

$$dx_2 = 0 \;,\; dx_3 = 0 \;;\; dx_1 = 0 \;,\; \sin\theta\, dx_2 + \cos\theta\, dx_3 = 0 \;;$$
$$dx_1 = 0 \;,\; \cos\theta\, dx_2 - \sin\theta\, dx_3 = 0 .$$

In fine dalle (4′) seguono per gli invarianti principali e per le curvature riemanniane principali le espressioni

$$2\omega_1 = -(\alpha_2 - \alpha_3)^2 \;,\; 2\omega_2 = -2\omega_3 = \alpha_2^2 - \alpha_3^2 \;;$$

$$\omega_{11} = \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_3}{2}\right)^2 \;,\; \omega_{22} = \left(\frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}\right)^2 - \alpha_2^2 \;,\; \omega_{33} = \left(\frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}\right)^2 - \alpha_3^2 .$$

Se è $\alpha_1 > 0$, facciamo le posizioni

$$\lambda_{1/1} = 1 \;,\; \lambda_{2/1} = \lambda_{3/1} = \lambda_{1/3} = 0 . \tag{7}$$

Rimarranno da determinare $\lambda_{1/2}, \lambda_{2/2}, \lambda_{2/3}, \lambda_{3/2}$ e $\lambda_{3/3}$ in modo che sia $\lambda \neq 0$ e risultino soddisfatte le equazioni

$$(\alpha_1)\qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \lambda_{1/2}}{\partial x_1} = 0 \;,\; \frac{\partial \lambda_{1/2}}{\partial x_3} = \alpha_1 \lambda \\ & \frac{\partial \lambda_{2/3}}{\partial x_2} - \frac{\partial \lambda_{2/2}}{\partial x_3} = \alpha_2\, \lambda_{3/3}\, \lambda_{1/2} \\ & \frac{\partial \lambda_{3/2}}{\partial x_3} - \frac{\partial \lambda_{3/3}}{\partial x_2} = \alpha_3\, \lambda_{2/3}\, \lambda_{1/2} \\ & \frac{\partial \lambda_{2/2}}{\partial x_1} = \alpha_2\, \lambda_{3/2} \;,\; \frac{\partial \lambda_{2/3}}{\partial x_1} = \alpha_2\, \lambda_{3/3} \\ & \frac{\partial \lambda_{3/2}}{\partial x_1} = -\alpha_3\, \lambda_{2/2} \;,\; \frac{\partial \lambda_{3/3}}{\partial x_1} = -\alpha_3\, \lambda_{2/3} . \end{aligned} \right.$$

Si soddisfa alle ultime quattro ponendo

$$(7')\qquad \begin{cases} \sqrt{\alpha_3}\,\lambda_{2/2} = \cos\theta\ , & \sqrt{\alpha_3}\,\lambda_{2/3} = \cos(\theta+\psi) \\ \sqrt{\alpha_2}\,\lambda_{3/2} = -\sin\theta\ , & \sqrt{\alpha_2}\,\lambda_{3/3} = -\sin(\theta+\psi)\,, \end{cases}$$

con

$$(8)\qquad \theta = \sqrt{\alpha_2\,\alpha_3}\cdot x_1$$

e ψ funzione arbitraria di x_2 e di x_3.

Alle altre si soddisfa ponendo

$$(7'')\qquad \lambda_{1/2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2\,\alpha_3}}\,\frac{\partial\psi}{\partial x_2}$$

e per ψ un integrale della equazione

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2\,\partial x_3} + \alpha_1 \sin\psi = 0$$

qualunque, perchè diverso da 0, essendo $\sqrt{\alpha_2\,\alpha_3}\cdot\lambda = -\sin\psi$.

Per ottenere un tale integrale si ponga

$$x = x_2 + x_3$$

e si assuma ψ funzione della sola x.

Essa dovrà soddisfare alla equazione

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \alpha_1 \sin\psi = 0\,,$$

la quale ammette l'integrale primo

$$\sqrt{2\alpha_1}\cdot dx = \frac{d\psi}{\sqrt{\cos\psi}}\,,$$

ovvero, posto

$$y = \sqrt{\cos\psi}\,,$$

$$\sqrt{\frac{\alpha_1}{2}}\,dx = -\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}\,;$$

donde (¹)

$$(9)\qquad \frac{1}{\cos\psi} = 2\,\mathfrak{p}\left(-\sqrt{\alpha_1}\cdot x\,, 1\,, 0\right) = \frac{2}{\alpha_1}\,\mathfrak{p}\left(x_2 + x_3\,, \alpha_1^2\,, 0\right).$$

La espressione (7'') di $\lambda_{1/2}$, per la (9), assume la forma

$$\lambda_{1/2} = \sqrt{\frac{2\alpha_1}{\alpha_2\,\alpha_3}\cos\psi}\,,$$

(¹) Cfr. Appell et Lacour, *Principes de la théorie des fonctions ellyptiques*, Paris, G. V., 1897, pag. 89; e Humbert, *Cours d'Analyse*, Paris, G. V., 1904, tomo II, pag. 228.

e quindi abbiamo per le forme fondamentali e per il ds^2 delle varietà della 2ª sottoclasse le espressioni

$$\psi_1 = dx_1 + \sqrt{\frac{2\alpha_1}{\alpha_2\alpha_3}}\cos\psi\, dx_2$$

$$\sqrt{\alpha_3}\,\psi_2 = \cos\theta\, dx_2 + \cos(\theta+\psi)\, dx_3$$

$$\sqrt{\alpha_2}\,\psi_3 = \sin\theta\, dx_2 + \sin(\theta+\psi)\, dx_3$$

$$ds^2 = dx_1^2 + \left(\frac{\sin^2\theta}{\alpha_2} + \frac{\cos^2\theta}{\alpha_3} + \frac{2\alpha_1}{\alpha_2\alpha_3}\cos\psi\right) dx_2^2$$

$$+ \left(\frac{\cos^2(\theta+\psi)}{\alpha_3} + \frac{\sin^2(\theta+\psi)}{\alpha_2}\right) dx_3^2 + 2\sqrt{\frac{2\alpha_1}{\alpha_2\alpha_3}}\cos\psi\, dx_1\, dx_2$$

$$+ 2\left(\frac{\cos\theta\cos(\theta+\psi)}{\alpha_3} + \frac{\sin\theta\sin(\theta+\psi)}{\alpha_2}\right) dx_2\, dx_3\,;$$

θ e ψ risultando definite dalle (8) e (9).

Questi risultati comprendono, come è naturale, quelli superiormente ottenuti supponendo $\alpha_1 = 0$; nel qual caso dalla (9) risulta $\psi = \frac{\pi}{2}$.

In particolare essi sono applicabili agli spazii a curvatura costante positiva K, pei quali è da porre $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 2\sqrt{K}$. Per essi risulta:

$$\psi_1 = dx_1 + \sqrt[4]{\frac{\cos^2\psi}{K}}\, dx_2$$

$$\sqrt[4]{4K}\cdot\psi_2 = \cos\theta\, dx_2 + \cos(\theta+\psi)\, dx_3$$

$$\sqrt[4]{4K}\cdot\psi_3 = \sin\theta\, dx_2 + \sin(\theta+\psi)\, dx_3\,,$$

essendo

$$\theta = 2\sqrt{K}\, x_1\,,\quad \frac{1}{\cos\psi} = \frac{1}{2\sqrt{K}}\,\wp(x_2 + x_3\,, 4K\,, 0)\,.$$

Abbiamo così una nuova espressione per il loro ds^2. Di più abbiamo determinata per essi una speciale terna ortogonale, che si distingue da tutte le altre per la proprietà, che le congruenze di linee, che la costituiscono, sono tutte geodetiche.

10. Rimangono da considerare le varietà della 3ª sottoclasse ($\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 < 0$).

Si supponga dapprima $\alpha_1 = 0$ e si assuma, come nel caso analogo considerato nel § precedente,

$$\lambda_{1/1} = 1\,,\quad \lambda_{1/2} = \lambda_{1/3} = \lambda_{2/1} = \lambda_{3/1} = 0\,.$$

Rimarranno ancora da determinare $\lambda_{2/2}$, $\lambda_{2/3}$, $\lambda_{3/2}$ e $\lambda_{3/3}$ in modo che risulti

$\lambda \neq 0$ e siano soddisfatte le equazioni (α_0). Tutto ciò si ottiene ponendo

$$\theta = \sqrt{-\alpha_2\alpha_3} \cdot x_1$$

$$\sqrt{-\alpha_3}\,\lambda_{2/2} = \cos h\theta \ , \ \sqrt{-\alpha_3}\,\lambda_{2/3} = \sin h\theta$$

$$\sqrt{\alpha_2}\,\lambda_{3/2} = \sin h\theta \ , \ \sqrt{\alpha_2} \cdot \lambda_{3/3} = \cos h\theta \, .$$

Abbiamo così

$$\psi_1 = dx_1$$

$$\sqrt{-\alpha_3} \cdot \psi_2 = \cos h\theta \, dx_2 + \sin h\theta \, dx_3 \ ; \ \sqrt{\alpha_2}\, \psi_3 = \sin h\theta \, dx_2 + \cos h\theta \, dx_3$$

$$ds^2 = dx_1^2 + \left(\frac{\sin h^2\theta}{\alpha_2} + \frac{\cos h^2\theta}{-\alpha_3}\right) dx_2^2 + \left(\frac{\sin h^2\theta}{-\alpha_3} + \frac{\cos h^2\theta}{\alpha_2}\right) dx_3^2$$
$$+ \left(\frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{-\alpha_3}\right) \sin h2\theta \, dx_2 \, dx_3 \, .$$

Anche in questo caso le equazioni delle congruenze principali sono immediatamente integrabili e per gli invarianti e per le curvature riemanniane principali valgono le espressioni stabilite per la 2ª sottoclasse nel caso $\alpha_1 = 0$.

I risultati, a cui siamo giunti per la 3ª sottoclasse, si semplificano notevolmente se è $\alpha_2 + \alpha_3 = 0$. In particolare per gli invarianti e per le curvature riemanniane principali valgono allora le espressioni

$$\omega_1 = -2\alpha_2^2 \ , \ \omega_2 = \omega_3 = 0$$

$$\omega_{11} = -2\omega_{22} = -2\omega_{33} = 2\alpha_2^2 \, ,$$

e da queste ultime segue che si tratta di varietà dotate di un gruppo di movimenti rigidi a quattro parametri.

Sia $\alpha_1 > 0$. Fatte ancora le posizioni (7), le cose procedono come nel caso analogo considerato nel paragrafo precedente colla sola differenza che alle posizioni (7′) e (7″) sono da sostituire le

$$\sqrt{-\alpha_3}\,\lambda_{2/2} = \cos h\theta \ , \ \sqrt{-\alpha_3}\,\lambda_{2/3} = \sin h(\theta + \psi)$$

$$\sqrt{\alpha_2}\,\lambda_{3/2} = \sin h\theta \ , \ \sqrt{\alpha_2}\,\lambda_{3/3} = \cos h(\theta + \psi)$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{\sqrt{-\alpha_2\alpha_3}} \frac{\partial\psi}{\partial x_2} \, .$$

essendo

(8′) $$\theta = \sqrt{-\alpha_2\alpha_3} \cdot x_1$$

e ψ funzione di x_2 e di x_3 soltanto, la quale soddisfi alla equazione

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2 \, \partial x_3} - \alpha_1 \cos h\psi = 0 \, .$$

Assunta ancora per ψ una funzione della sola $x = x_2 + x_3$, essa dovrà soddisfare alla equazione

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \alpha_1 \cos h\psi = 0\,,$$

che ammette l'integrale primo

$$\frac{d\psi}{dx} = \sqrt{2\alpha_1 \sin h\psi}\,,$$

per il quale si ha poi

$$\lambda_{1/2} = \sqrt{\frac{2\alpha_1}{-\alpha_2\alpha_3}} \sin h\psi\,.$$

Posto

$$y = \sqrt{i \sin h\psi}\,,$$

rimane da integrare la equazione

$$\sqrt{\frac{i\,\alpha_1}{2}}\,dx = \frac{dy}{\sqrt{1 - y^4}}\,.$$

Essa si integra, come nel caso analogo presentatosi nel paragrafo precedente, per mezzo delle funzioni ellittiche di Weierstrass e si ottiene

$$(9') \qquad \frac{1}{\sin h\psi} = \frac{2}{\alpha_1}\,\wp(x_2 + x_3\,, -\alpha_1^2\,, 0)\,.$$

Riassumendo per le V_3 della 3^a sottoclasse abbiamo:

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= dx_1 + \sqrt{\frac{2\alpha_1}{-\alpha_2\alpha_3}} \sin h\psi\, dx_2 \\
\sqrt{-\alpha_3}\,\psi_2 &= \cos h\theta\, dx_2 + \sin h(\theta + \psi)\, dx_3 \\
\sqrt{\alpha_2}\,\psi_3 &= \sin h\theta\, dx_2 + \cos h(\theta + \psi)\, dx_3 \\
ds^2 &= dx_1^2 + \left(\frac{\sin h^2\theta}{\alpha_2} + \frac{\cos h^2\theta}{-\alpha_3} + \frac{2\alpha_1 \sin h\psi}{-\alpha_2\alpha_3}\right) dx_2^2 \\
&\quad + \left(\frac{\sin h^2(\theta+\psi)}{-\alpha_3} + \frac{\cos h^2(\theta+\psi)}{\alpha_2}\right) dx_3^2 \\
&\quad + 2\left(\frac{\sin h\theta \cos h(\theta+\psi)}{\alpha_2} + \frac{\cos h\theta \sin h(\theta+\psi)}{-\alpha_3}\right) dx_2\, dx_3 \\
&\quad + 2\sqrt{\frac{2\alpha_1}{-\alpha_2\alpha_3}} \sin h\psi\, dx_1\, dx_2\,,
\end{aligned}$$

θ e ψ essendo definite dalle (6') e (7').

Questi risultati comprendono come caso particolare quelli stabiliti sopra nella ipotesi $\alpha_1 = 0$. Aggiungiamo che, se si suppone invece $\alpha_1 > 0$, si

possono ottenere per le forme fondamentali altre espressioni le quali (scambiate semplicemente fra di loro ψ_1 e ψ_3) differiscono da quelle stabilite per la sottoclasse 2ª soltanto perchè α_1 vi è sostituito da $-\alpha_1$, ed x_2+x_3 da x_2-x_3

11. Raccogliamo ora i risultati ottenuti in uno specchio, a chiarimento del quale è da ricordare:

1°) che con $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ rappresentiamo gli invarianti principali delle varietà considerate, per i quali si esprimono le curvature principali ω_h, mediante le

$$\omega_{hh}=\frac{\omega_1+\omega_2+\omega_3}{2}-\omega_h\,;$$

2°) che con ψ_1, ψ_2, ψ_3 designamo le forme fondamentali, note le quali si possano scrivere subito le equazioni

$$\psi_{i+1}=0\ ,\ \psi_{i+2}=0$$

delle congruenze principali ed il ds^2 della varietà, essendo

$$ds^2=\psi_1^2+\psi_2^2+\psi_3^2\,;$$

3°) che con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ designamo le anormalità delle dette congruenze.

Classe Iª.

$$\psi_1=dx_1\ ,\ \psi_2=dx_2-(\varrho_1-c)\,x_3\,dx_1\ ,\ \psi_3=dx_3+(\varrho_1+c)\,x_3\,dx_1$$
$$\omega_1=-2c^2\ ,\ \omega_3=-\omega_2=2c\varrho_1.$$

c costante, ϱ_1 funzione di x_1 soltanto.

Classe IIª.

Sottoclasse 1ª.

$$\psi_1=dx_1\ ,\ \psi_2=dx_2\ ,\ \psi_3=-\alpha_3\,x_1\,dx_2+dx_3$$
$$\omega_3=-\omega_1=-\omega_2=\tfrac{1}{2}\,\alpha_3^2$$

α_3 costante positiva.

Sottoclasse 2ª.

$$\psi_1=dx_1+\sqrt{\frac{2\alpha_1}{\alpha_2\,\alpha_3}}\cos\psi\,dx_2$$
$$\sqrt{\alpha_3}\cdot\psi_2=\cos\theta\,dx_2+\cos(\theta+\psi)\,dx_3$$
$$\sqrt{\alpha_2}\ \ \psi_3=\sin\theta\,dx_2+\sin(\theta+\psi)\,dx_3$$
$$\theta=\sqrt{\alpha_2\,\alpha_3}\cdot x_1\ ,\ \cos\psi=\frac{\alpha_1}{2\wp(x_2+x_3\,,\,\alpha_1^2\,,\,0)}$$
$$2\omega_h=\alpha_h^2-(\alpha_{h+2}-\alpha_{h+1})^2$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ costanti, di cui la prima positiva o nulla e le altre positive.

Sottoclasse 3ª.

$$\psi_1 = dx_1 + \sqrt{-\frac{2\alpha_1}{\alpha_2\,\alpha_3}\sin h\psi\,dx_2}$$

$$\sqrt{-\alpha_3}\cdot\psi_2 = \cos h\theta\,dx_2 + \sin h(\theta+\psi)\,dx_3$$

$$\sqrt{\alpha_2}\,\psi_3 = \sin h\theta\,dx_2 + \cos h(\theta+\psi)\,dx_3$$

$$\theta = \sqrt{-\alpha_2\,\alpha_3}\cdot x_1\ ,\quad \sin h\psi = \frac{\alpha_1}{2\wp(x_2+x_3\,,\,-\alpha_1^2\,,\,0)}$$

$$2\omega_h = \alpha_h^2 - (\alpha_{h+2} - \alpha_{h+1})^2\,,$$

$\alpha_1\,,\alpha_2\,,\alpha_3$ costanti, di cui la prima positiva o nulla, la seconda positiva e la terza negativa.

Meccanica celeste. — *Ricerche sopra la previsione dell'urto nel problema dei tre corpi.* Nota di G. Armellini, presentata dal Corrispondente R. Marcolongo.

1. Nella presente Nota noi ci proponiamo di risolvere il seguente

Problema. — « *Date le coordinate e le velocità iniziali di tre* « *corpi che si attirano secondo la legge di Newton e supposto che il* « *momento della quantità di moto del sistema sia diverso da zero, ricer-* « *care se tra i corpi stessi avrà luogo qualche urto. In caso di risposta* « *affermativa determinare l'istante in cui accadrà il primo urto* ».

2. A tale scopo siano $C_1\,C_2\,C_3$ i tre corpi, $r_1\,r_2\,r_3$ le tre distanze C_2C_3 C_1C_3 C_1C_2 e indichiamo con t il tempo. Poichè il momento della quantità di moto del sistema è diverso da zero, siamo sicuri che i tre corpi non possono urtarsi simultaneamente.

Costruiamoci allora l'integrale

$$S(t) = \int_0^t \frac{dt}{(r_1\,r_2\,r_3)^2}\,, \tag{1}$$

dove le r s'immaginano espresse in funzione del tempo. La S risulterà allora funzione *reale positiva* e *crescente* pei valori reali e positivi di t, e s'annullerà per $t=0$.

Cfr. Painlevé, *Sur les singularités des équations de la Dynamique et sur le problème des trois corps* (C. R., t. 123, pp. 871 e segg.; *Sur le cas du problème des trois corps où deux corps se choquent au bout d'un temps fini* (C. R., t. 125, pag. 1075); *Leçons sur la théorie analytique des éq. différentielles,* professées a Stockholm ecc.

Sia τ l'istante in cui ha luogo il *primo* urto a partire dall'origine dei tempi $t=0$, e supponiamo p. es. che esso abbia luogo tra C_1 e C_2. Allora, per noti teoremi, mentre t tende a τ, le distanze r_1 ed r_2 tendono a limiti fissi ϱ_1 e ϱ_2, mentre r_3 tende a zero divenendo nulla come $\sqrt[3]{t^2}$ rispetto a t. *Ne segue che la funzione* S(t) *diverrà infinita per* $t=\tau$.

3. In breve, mentre t cresce per valori reali da 0 a τ, la S si mantiene reale e positiva e cresce da 0 a ∞. Verrà quindi a stabilirsi una corrispondenza biunivoca tra i valori reali del tempo compresi nell'intervallo $0 \leqq t \leqq \tau$ e i valori reali e positivi della S; la corrispondenza sarà anche continua tranne all'estremo superiore per cui a $t=\tau$ corrisponde $S=\infty$ e viceversa.

4. Prendiamo ora una nuova funzione T(t) definita dall'equazione

$$\text{(2)} \qquad T(t)=\frac{S}{1+S}=1-\frac{1}{1+S},$$

da cui inversamente

$$\text{(3)} \qquad S(t)=\frac{T}{1-T}.$$

Dalla (2) risulta che per valori di t compresi nell'intervallo $0 \leqq t \leqq \tau$, la T(t) è una funzione *reale positiva* e *crescente* dell'argomento t, la quale si annulla per $t=0$ e diviene eguale all'unità per $t=\tau$.

5. Prendiamo ora un valore reale qualsiasi T_0 di T compreso fra lo zero e l'unità, l'estremo superiore *escluso*. Ad esso per la (3) verrà a corrispondere un valore S_0 di S e quindi per la (1) un valore t_0 di t reale, positivo e compreso fra 0 e τ, l'estremo superiore *escluso*. Ne segue che essendo t_0 un punto di regolarità le coordinate dei tre corpi e quindi le distanze r saranno funzioni olomorfe in $t-t_0$; anche T risulterà perciò olomorfa in $t-t_0$.

6. Ciò posto dalla (2) e dalla (1) derivando e combinando si ottiene immediatamente

$$\text{(4)} \qquad \frac{dt}{dT}=(r_1\, r_2\, r_3)^2\,(1+S)^2.$$

Ora, poichè nell'istante t_0 non ha luogo alcun urto, tutte le r sono diverse da zero e quindi la derivata $\frac{dt}{dT}$ risulta in esso positiva e *non nulla*. Sono perciò *verificate* le condizioni necessarie e sufficienti per l'*inversione* e noi potremo affermare che *nell'intorno di* T_0 *il tempo* t *e le coordinate dei tre corpi sono sviluppabili in serie di potenze intere e positive di* $T-T_0$, *convergenti per* $|T-T_0|$ *sufficientemente piccolo.*

Tutto ciò naturalmente vale per ogni valore di T_0 compreso nell'intervallo da $T_0 = 0$ a $T_0 = 1$, l'estremo superiore restando sempre *escluso*.

7. Ne risulta che se consideriamo T come una variabile complessa e se, prendendo per *centro* l'origine $T = 0$, disegnamo sul suo piano di rappresentazione la *stella* di Mittag-Leffler relativa al tempo t, essa conterrà il segmento $0 \leq T \leq 1$, formando l'estremo superiore $T = 1$ un *vertice* della stella medesima.

Allora, seguendo le regole note, potremo rappresentare il tempo t in serie convergente di polinomi P_h in T ed avremo perciò uno sviluppo della forma:

$$t = \sum_{h=0}^{h=\infty} P_h(T) = \sum_{h=0}^{h=\infty} \sum_{i=0}^{i=h} a_{hi} T^i. \tag{5}$$

I coefficienti a_{hi} potranno tutti calcolarsi (con una certa arbitrarietà, come è noto dalla teoria della stella) una volta conosciuti i valori iniziali delle coordinate e delle velocità dei tre corpi nell'istante iniziale $t = T = 0$. *Noi dovremo quindi considerare le costanti a_{hi} come quantità note.*

8. In pratica per ottenere facilmente i coefficienti a_{hi} potremo valerci del metodo del Borel ([1]).

Essendo $t = T = 0$ un punto di regolarità per il movimento, nell'intorno di $T = 0$ possiamo sviluppare t in serie di potenze intere e positive di T

$$t = \sum \lambda_m T^m \qquad (\lambda_0 = 0). \tag{5bis}$$

Poichè conosciamo le coordinate e le velocità iniziali, i coefficienti λ_m si determinano senza difficoltà; ed è agevole anche di determinare una costante K più piccola del raggio di convergenza delle serie (5^{bis}).

Ciò posto consideriamo la funzione $\dfrac{K}{K - T}$ e sviluppiamola in serie di polinomi Q(T) secondo i procedimenti di Runge e Painlevé:

$$\frac{K}{K - T} = \sum Q_n(T) = \sum \sum \gamma_{nm} T^m. \tag{5ter}$$

I coefficienti γ sono facilmente determinabili e la (5^{ter}) è convergente per tutti i punti del piano complesso della variabile T, eccettuata la parte dell'asse reale da $T = K$ a $T = \infty$.

Ciò posto lo sviluppo cercato di t in serie di polinomi in T è il seguente

$$t = \sum \sum \gamma_{ni} \lambda_i T^i. \tag{5^{quater}}$$

(1) Cfr. Vivanti, *Theorie der eindeutigen analytischen funktionen* (pag. 372). Avvertiamo che il Vivanti, per semplicità, suppone nello sviluppo (5^{ter}) $K = 1$.

Secondo note teorie [1], esso converge uniformemente in tutti i punti interni alla stella.

9. Ciò posto essendo la serie (5) funzione continua, positiva e crescente di T nell'intervallo *aperto* (cioè escludente l'estremo superiore) $0 \leqq T < 1$, ne segue che facendo tendere T all'unità la serie $\sum\limits_{h=0}^{h=\infty} \sum\limits_{i=0}^{i=h} a_{hi} T^i$:

a) o tenderà ad un limite positivo ben determinato e finito A;

b) oppure tenderà all'infinito.

Esaminiamo separatamente questi due casi; ma prima, ad evitare ogni equivoco, facciamo notare al lettore che noi affermiamo *soltanto* che la nostra serie *tende ad un limite* positivo o all'infinito, e non già che essa assume questi valori per $T = 1$. Così per es. la serie $\sum u_n$, dove si ha:

$$u_n = x(1 - x^2)^{n-1}$$

è convergente ed uguale a $+\frac{1}{x}$ nell'intervallo aperto $-1 < x < 0$ e tende quindi all'infinito negativo quando x tende, crescendo, a zero: eppure per $x = 0$ il suo valore è zero.

10. *Caso I.* — Supponiamo che si abbia:

$$\lim_{T=1} \sum_{h=0}^{h=\infty} \sum_{i=0}^{i=h} a_{hi} T^i = A \,. \tag{6}$$

Dico che in questo caso il primo urto tra i tre corpi avrà luogo precisamente nell'istante $t = A$.

Per vederlo, facciamo infatti crescere t verso τ. Ambedue i membri della (5) tendono allora verso limiti determinati e finiti: il primo membro, evidentemente, verso τ; il secondo membro, secondo l'ipotesi, verso A. Ora se due quantità si mantengono costantemente uguali in tutti i punti interni di un dato intervallo ed ammettono limiti all'estremo superiore, questi limiti sono certamente uguali. Dunque ecc.

11. *Caso II.* — Supponiamo ora che si abbia:

$$\lim_{T=1} \sum_{h=0}^{h=\infty} \sum_{i=0}^{i=\infty} a_{hi} T^i = \infty. \tag{7}$$

Dico che in questo caso non avrà mai luogo alcun urto tra i tre corpi.

Infatti supponiamo p. es. che il primo urto abbia luogo nell'istante τ e facciamo crescere t tendendo verso τ. Risulterebbe allora che il primo membro della (5) avrebbe per limite τ, mentre il secondo membro l'infinito: ciò che è assurdo, giacchè i due membri restando uguali in tutti i

[1] Cfr. Vivanti, op. cit., pag. 363.

punti interni dell'intervallo $0 \leq T < 1$ ed ammettendo limiti all'estremo superiore, questi debbono risultare uguali. Dunque ecc.

12. *Siamo dunque riusciti a costruire un'espressione, la quale se tende all'infinito c'indica che l'urto è impossibile, e se invece ha un limite finito ci dà con questo, l'istante del primo urto. Il problema che ci proponevamo è quindi risoluto.*

13. Faremo ancora osservare, che noi ci siamo occupati solo degli *urti futuri* (cioè che hanno luogo per $t > 0$), ma che il metodo può applicarsi con poche modificazioni anche alla ricerca degli *urti passati*. La mancanza di spazio c'impedisce però di sviluppare questo argomento.

14. Termineremo questa Nota cercando di ricollegare il presente risultato, con altri relativi allo stesso problema ed ormai divenuti classici.

È noto che il Painlevé (op. cit.) affermò che per l'esistenza dell'urto dovevano verificarsi due condizioni analitiche distinte, senza però dare ulteriori particolari.

Nel 1903 il prof. Levi-Civita (1) studiando il problema ristretto dei tre corpi costruì una relazione analitica uniforme, caratteristica sia degli urti passati (eiezioni) che dei futuri (collisioni) e pervenne anche ad un nuovo integrale, diverso da quello dell'energia. Più tardi il Bisconcini (2) costruì le due condizioni del Painlevé nel caso generale, ammettendo che nelle vicinanze dell'urto di C_1 con C_2 la velocità angolare del raggio vettore $C_1 C_2$ restasse finita: ciò che fu dimostrato vero dal Sundman.

Ora in una prossima Nota io spero di poter mostrare che, nel caso generale, le due condizioni del Painlevé possono ricavarsi dall'esistenza di un limite finito per l'espressione che abbiamo ottenuta. Nel caso del problema ristretto vedremo che una di queste condizioni si riduce ad un'identità, restando quindi per gli urti l'unica condizione del Levi-Civita.

(1) Cfr. Levi-Civita, *Traiettorie ed urti nel problema ristretto dei tre corpi* (Ann. di Mat., 1903); id. id., *Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps* (Acta Math., n. 4).

(2) *Sur le problème des trois corps* (Acta Math., 1904).

Matematica. — *Differenziali esatti.* Nota di C. BURALI-FORTI, presentata dal Corrispondente R. MARCOLONGO.

Nell'A. V. G. [*Analyse véctorielle générale*, di C. Burali-Forti et R. Marcolongo, Pavia, Mattei], vol. I, pag. 118 sono ottenute, con tre procedimenti diversi, sebbene simili, le condizioni affinchè le espressioni differenziali αdP, $\mathbf{u}\wedge dP$, $\mathbf{u}\times dP$ (con α omografia ed $\mathbf{u}$ vettore funzioni del punto P che varia in un campo a tre dimensioni) siano *differenziali esatti* in tutto il campo. Tali condizioni, insieme ad altre, possono tutte essere facilmente ridotte ad *una sola*; quella che deve esser soddisfatta affinchè $\alpha d\mathbf{u}$ sia differenziale esatto in tutto il campo in cui varia P (campo a tre dimensioni). Ciò ottengo mediante la riduzione di una notevole espressione vettoriale alternata (n. 1). Inoltre, tenendo conto della recente ed importante introduzione, fatta da P. Burgatti e R. Marcolongo, degli *operatori differenziali* d/dP, div, rot, grad, Rot, Δ, Δ' *su di una superficie* [1] trovo pure la condizione necessaria e sufficiente affinchè l'espressione differenziale $\alpha d\mathbf{u}$, e tutte le altre che ne derivano, sia differenziale esatto quando P varia su di una superficie σ.

1. *Se* α, β *sono omografie funzioni del punto* P, *allora, qualunque siano i vettori* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, *costanti o funzioni di* P *si ha sempre*

$$(1) \qquad \frac{d\alpha}{dP}\mathbf{x}\cdot\beta\mathbf{y} - \frac{d\alpha}{dP}\mathbf{y}\cdot\beta\mathbf{x} = \{\mathrm{K\,Rot\,K}(\alpha\beta) - \alpha\cdot\mathrm{K\,Rot\,K}\beta\}(\mathbf{x}\wedge\mathbf{y}).$$

Essendo $\mathbf{a}$ vettore arbitrario indipendente da P, costante, si ha, successivamente, applicando note regole esposte in A. V. G. [2],

$$\left\{\frac{d\alpha}{dP}\mathbf{x}\cdot\beta\mathbf{y} - \frac{d\alpha}{dP}\mathbf{y}\cdot\beta\mathbf{x}\right\}\times\mathbf{a} = \mathbf{y}\times\mathrm{K}\beta\cdot\left(\frac{d\mathrm{K}\alpha}{dP}\mathbf{x}\right)\mathbf{a} - \mathbf{x}\times\mathrm{K}\beta\cdot\left(\frac{d\mathrm{K}\alpha}{dP}\mathbf{y}\right)\mathbf{a} =$$
$$\mathbf{y}\times\mathrm{K}\beta\cdot\frac{d(\mathrm{K}\alpha\mathbf{a})}{dP}\mathbf{x} - \mathbf{x}\times\mathrm{K}\beta\cdot\frac{d(\mathrm{K}\alpha\mathbf{a})}{dP}\mathbf{y} = 2\mathrm{V}\left\{\mathrm{K}\beta\cdot\frac{d(\mathrm{K}\alpha\mathbf{a})}{dP}\right\}\times(\mathbf{x}\wedge\mathbf{y}) =$$
$$[\{\mathrm{Rot}(\mathrm{K}\beta\cdot\mathrm{K}\alpha) - \mathrm{Rot\,K}\beta\,.\,\mathrm{K}\alpha\}\mathbf{a}]\times(\mathbf{x}\wedge\mathbf{y}) =$$
$$\mathbf{a}\times\{\mathrm{K\,Rot\,K}(\alpha\beta) - \alpha\cdot\mathrm{K\,Rot\,K}\beta\}(\mathbf{x}\wedge\mathbf{y})$$

che per l'arbitrarietà di $\mathbf{a}$ dimostra la (1) [3].

[1] P. Burgatti, *I teoremi del gradiente, della divergenza,...* Mem. della R. Acc. delle Scienze di Bologna, ser. VII, tomo IV; R. Marcolongo, *Su alcuni operatori superficiali*, Rend. R. Accad. dei Lincei, vol. XXVI, ser. 5ª, 2° sem. 1917, pag. 263 e segg.

[2] Cfr. anche, A. Pensa, *Alcuni operatori differenziali omografici*, Atti R. Acc. di Torino, vol. XLVIII (1912).

[3] Introducendo l'operatore binario S di M. Pieri [A. V. G., vol. I, pag. 95] il primo membro della (1) assume la forma

$$\mathrm{S}(\alpha, \beta\mathbf{y})\,\mathbf{x} - \mathrm{S}(\alpha, \beta\mathbf{x})\,\mathbf{y}.$$

Se nella (1) al posto di α si pone l'omografia assiale $\mathbf{u}\wedge$ si ha la formula notevole

$$\left(\frac{d\alpha}{dP}\mathbf{x}\right)(\mathbf{u}\wedge\mathbf{y}) - \left(\frac{d\alpha}{dP}\mathbf{y}\right)(\mathbf{u}\wedge\mathbf{x}) = \left\{\frac{d\alpha}{dP}\mathbf{u} - \mathrm{H}(\mathbf{u}, \mathrm{grad}\,\alpha)\right\}(\mathbf{x}\wedge\mathbf{y}).$$

2. In tutto ciò che segue α è omografia ed $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ sono vettori, funzioni del punto P che varia, o in uno spazio (continuo, ecc.) a tre dimensioni, ovvero in una superficie σ la cui normale nel punto generico P è parallela al vettore unitario $\mathbf{N}$ che è pure funzione di P.

Affinchè l'espressione differenziale

$$(2) \qquad \alpha\, d\mathbf{u}$$

sia differenziale esatto in tutto il campo è necessario e sufficiente che

$$(2') \qquad \operatorname{Rot} \mathrm{K}\left(\alpha \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dP}\right) = 0,$$

ovvero

$$(2'') \qquad \left\{\mathrm{K} \operatorname{Rot}_\sigma \mathrm{K}\left(\alpha \cdot \left(\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right)_\sigma\right)\right\}\mathbf{N} = 0,$$

secondo che P varia nel campo a tre dimensioni o nella superficie σ.

Per d, δ spostamenti arbitrarî di P si ha dalla (1) e da A. V. G., vol. I, pag. 85, [6],

$$\begin{aligned} d(\alpha\,\delta\mathbf{u}) - \delta(\alpha\, d\mathbf{u}) &= d\alpha \cdot \delta\mathbf{u} - \delta\alpha \cdot d\mathbf{u} \\ &= \frac{d\alpha}{dP} dP \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dP}\delta P - \frac{d\alpha}{dP}\delta P \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dP} dP \\ &= \left\{\mathrm{K} \operatorname{Rot} \mathrm{K}\left(\alpha \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dP}\right)\right\}(dP \wedge \delta P). \end{aligned}$$

Ora: $\alpha\, d\mathbf{u}$ è differenziale esatto solamente quando, per d, δ spostamenti arbitrarî il primo membro della formula precedente è *nullo*; sarà nullo anche l'ultimo e per P variabile nel campo a tre dimensioni varrà la (2') poichè $dP \wedge \delta P$ è vettore arbitrario.

È facile dimostrare che: *tutte le formule di* A. G. V. *che contengono gli operatori differenziali* d/dP, div, rot, grad, Rot, Δ, Δ', *ma* NON *i loro prodotti, valgono inalterate per i medesimi operatori con l'indice* σ, *cioè sulla superficie*. Ciò posto valgono pure su σ (cioè per dP e δP normali ad $\mathbf{N}$) le eguaglianze precedenti e l'ultimo membro dà la (2'') poichè $dP \wedge \delta P$ è vettore parallelo ad $\mathbf{N}$.

3. Del teorema ora dimostrato è importante conseguenza il seguente:

L'espressione differenziale

$$(3) \qquad \mathbf{v} \times d\mathbf{u}$$

è un differenziale esatto in tutto il campo solamente quando

$$(3') \qquad \operatorname{rot}\left(\mathrm{K}\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{v}\right) = 0,$$

ovvero

$$(3'') \qquad \mathbf{N} \times \operatorname{rot}_\sigma\left(\mathrm{K}\left(\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right)_\sigma \mathbf{v}\right) = 0$$

secondo che P varia in un campo a tre dimensioni o sulla superficie σ.

Qualunque sia il vettore costante $\mathbf{a}$, è evidente che $\mathbf{v}\times d\mathbf{u}$ è differenziale esatto solamente quando è tale

$$\mathbf{v}\times d\mathbf{u}\cdot\mathbf{a} = \mathrm{H}(\mathbf{v}\,,\mathbf{a})\,d\mathbf{u}\,.$$

Siamo così ridotti al caso del n. 1 con $\alpha = \mathrm{H}(\mathbf{v}\,,\mathbf{a})$. Ma da A. V. G., vol. I, pag. 84, [3] si ha subito

$$\left[\mathrm{K}\ \mathrm{Rot}\ \mathrm{K}\left\{\mathrm{H}(\mathbf{v}\,,\mathbf{a})\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right\}\right](dP\wedge\delta P) =$$

$$\left[\mathrm{K}\ \mathrm{Rot}\ \mathrm{K}\ \mathrm{H}\left(\mathrm{K}\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{v}\,.\,\mathbf{a}\right)\right](dP\wedge\delta P) =$$

$$\mathrm{H}\left\{\mathrm{rot}\left(\mathrm{K}\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{v}\,,\mathbf{a}\right)\right\}(dP\wedge\delta P) = \mathrm{rot}\left(\mathrm{K}\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{v}\,.\,\mathbf{a}\right)\times(dP\wedge\delta P)\cdot\mathbf{a}$$

il che dimostra, per la (2'), la (3') poichè $\mathbf{a}\,, dP\wedge\delta P$ sono vettori arbitrarî. Dimostra pure (cfr. n. 2) la (3'') poichè $\mathbf{a}$ è arbitrario e $dP\wedge\delta P$ è parallelo ad $\mathbf{N}$.

4. Dal teorema del n. 3 risultano pure le condizioni affinchè

$$\mathbf{v}\wedge d\mathbf{u}\ \ ,\ \ \mathbf{v}\wedge\alpha\,d\mathbf{u}\ \ ,\ \ \alpha(\mathbf{v}\wedge d\mathbf{u})$$

siano differenziali esatti bastando sostituire ad α, rispettivamente, le omografie $\mathbf{v}\wedge$, $\mathbf{v}\wedge\alpha$, $\alpha\cdot\mathbf{v}\wedge$.

Dal teorema del n. 2 risulta pure la condizione affinchè $\mathbf{v}\times\alpha\,d\mathbf{u}$ sia differenziale esatto poichè $\mathbf{v}\times\alpha\,d\mathbf{u} = (\mathrm{K}\alpha\mathbf{v})\times d\mathbf{u}$ e basta quindi sostituire $\mathrm{K}\alpha\mathbf{v}$ a $\mathbf{v}$.

Se nei teoremi del n. 2 e n. 3, e in quelli ora considerati, si pone $\mathbf{u} = P - O$, con O punto fisso, cioè $d\mathbf{u} = dP$, allora si trovano le condizioni affinchè

$$\alpha\,dP\ ,\ \mathbf{v}\wedge dP\ ,\ \mathbf{v}\wedge\alpha\,dP\ ,\ \alpha(\mathbf{v}\wedge dP)\ ,\ \mathbf{v}\times dP\ ,\ \mathbf{v}\times\alpha\,dP$$

siano differenziali esatti, sia per P variabile in un campo a tre dimensioni, sia per P variabile su σ. In quest'ultimo caso le condizioni (2''), (3'') equivalgono a quelle che da esse si ottengono sopprimendo l'indice σ; come il lettore può facilmente verificare. Inoltre per $d\mathbf{u} = dP$ si ritrovano, come è ovvio, le condizioni esposte a pag. 118 di A. V. G. quando P varia in un campo a tre dimensioni.

Delle condizioni $\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\left(\alpha\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right) = 0$, $\mathrm{rot}\left(\mathrm{K}\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{v}\right) = 0$ per P variabile nello spazio a tre dimensioni, si può dare una dimostrazione assai più semplice di quella precedente, ma che peraltro, non solo non è valida per P variabile sulla superficie σ, ma non dà, nemmeno in modo indiretto, le

condizioni affinchè $\alpha d\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \times d\mathbf{u}$ siano differenziali esatti su σ. Ecco la dimostrazione. Deve essere

$$\alpha d\mathbf{u} = d\mathbf{x} \quad , \quad \mathbf{v} \times d\mathbf{u} = dm$$

ove $\mathbf{x}$ è vettore e m è numero funzione di P, ovvero

$$\alpha \frac{d\mathbf{u}}{dP} dP = \frac{d\mathbf{x}}{dP} dP \quad , \quad \left(\mathrm{K} \frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{v}\right) \times dP = \operatorname{grad} m \times dP ,$$

che, per essere dP vettore arbitrario, dànno

$$(\alpha) \qquad \mathrm{K}\left(\alpha \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dP}\right) = \mathrm{K} \frac{d\mathbf{x}}{dP} \quad , \quad \mathrm{K} \frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{v} = \operatorname{grad} m .$$

Dunque, affinchè $\alpha d\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \times d\mathbf{u}$ siano differenziali esatti è necessario e sufficiente che esistano $\mathbf{x}$ ed m soddisfacenti alle (α); ma in virtù delle [6], [2] del n. 69 di A. V. G., dalle (α) si elimina $\mathbf{x}$ ed m operando con Rot e rot e si ritrovano le condizioni già ottenute per altra via (¹).

5. Quando P varia sulla superficie σ, si ottengono dei casi particolari assai interessanti se al posto dei vettori generici $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ si pongono (ordine arbitrario) i vettori $P - O$, $\mathbf{N}$ e alla omografia generica α si sostituisce l'omografia $d\mathbf{N}/dP$ o la ciclica di questa (²). Sarebbe importante che questi casi particolari fossero studiati e completamente svolti. Qui ne citiamo uno come esempio.

Affinchè $\mathbf{u} \wedge dP$ sia differenziale esatto, variando P in σ, deve essere, per la $(2'')$

$$(\mathrm{K}\, \mathrm{Rot}_\sigma\, \mathbf{u} \wedge)\, \mathbf{N} = 0$$

(¹) Operando nelle (α) con Rot e rot e facendo uso soltanto delle [6] **n. 44** e [3] **n.** 39 di A. V. G. si dimostra che le condizioni in questione sono *necessarie*; mentre le [6], [2] del n. **69** provano che sono *necessarie* e *sufficienti*.

(²) Per tali casi particolari saranno utili le formule seguenti nelle quali si è posto $\lambda = d\mathbf{N}/dP$.

$$\operatorname{rot} \mathbf{N} = \operatorname{rot}_\sigma \mathbf{N} = 0 \quad , \quad \operatorname{div} \mathbf{N} = \operatorname{div}_\sigma \mathbf{N} = \mathrm{I}_1 \lambda$$

$$\mathrm{Rot}\, \lambda = 0 \quad , \quad \mathrm{Rot}_\sigma \lambda = - \mathbf{N} \wedge \frac{d\lambda}{dP} \mathbf{N}$$

$$\operatorname{grad} \lambda = \operatorname{grad}_\sigma \lambda = \operatorname{grad} \mathrm{I}_1 \lambda$$

$$\operatorname{grad}_\sigma \mathrm{I}_1 \lambda = \operatorname{grad} \mathrm{I}_1 \lambda + \mathrm{I}_1 \lambda^2 . \mathbf{N} = \operatorname{grad} \mathrm{I}_1 \lambda + \{(\mathrm{I}_1 \lambda)^2 - 2 \mathrm{I}_2 \lambda\} \mathbf{N}$$

$$\operatorname{grad}_\sigma \mathrm{C}\lambda = \mathrm{I}_1 \lambda^2 . \mathbf{N} = - \operatorname{grad} \mathrm{I}_1 \lambda \times \mathbf{N} . \mathbf{N} .$$

Cfr. le mie Note, *Gradiente, rotazione e divergenza in una superficie* (Atti Acc. Torino, vol. XLV); *Alcune applicazioni alla geometria differenziale* ... (idem, vol. XLVI); *Fondamenti per la geometria differenziale* ... (Rend. Palermo, tomo XXXIII). Nella prima Nota per il gradiente su σ di una omografia si tenga conto (Burgatti e Marcologo, loc. cit.) del nuovo significato generale di $\operatorname{grad}_\sigma$, che coincide con Grad solo quando è applicato a un numero.

condizione che si trasforma successivamente in

$$\mathrm{C\,K}\left(\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right)_\sigma \mathbf{N}=0\ ,\ \left\{\mathrm{div}_\sigma\,\mathbf{u}-\left(\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right)_\sigma+(\mathrm{rot}_\sigma\,\mathbf{u})\wedge\right\}\mathbf{N}=0$$

$$\mathrm{div}_\sigma\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{N}-\mathbf{N}\wedge\mathrm{rot}_\sigma\,\mathbf{u}=0\,;$$

ma i due termini di questa sono vettori, l'uno parallelo e l'altro normale ad **N** e quindi la condizione cercata è

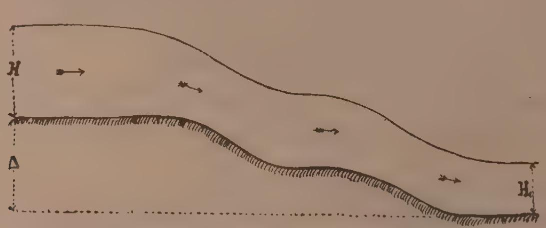
$$(a)\qquad \mathrm{div}_\sigma\,\mathbf{u}=0 \quad \mathrm{e} \quad \mathbf{N}\wedge\mathrm{rot}_\sigma\,\mathbf{u}=0$$

dalla quale potrà, forse, dedursi la forma generica di **u** quando siano completamente studiate le equazioni differenziali su σ (altro argomento importante di studio che semplificherà notevolmente l'ordinaria algebra-geometrica su σ).

Conviene notare che le (a) sono soddisfatte per $\mathbf{u}=\mathbf{N}$ quando σ è superficie di *area minima*; cioè per σ superficie di *area minima* esiste un vettore **x** funzione di P per il quale $\mathbf{N}\wedge dP=d\mathbf{x}$ qualunque sia lo spostamento d ed è interessante determinare il vettore **x** che deve avere notevole importanza per la superficie.

Idromeccanica. — *Una formola per la determinazione di dislivelli dei corsi d'acqua mediante misure di velocità.* Nota di U. Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Si consideri un canale scoverto a fondo comunque conformato; il liquido perfetto pesante, che in esso fluisce, sia animato da moto permanente ed irrotazionale. Si ammette che in due sezioni trasversali del canale, di eguale conformazione geometrica, il fondo del canale sia orizzontale (sensibilmente) ed il regime uniforme (essenzialmente diverso se vi è dislivello del fondo tra la sezione a monte e quella a valle).



Detti c e c_1 i valori delle velocità nelle predette sezioni e H l'altezza del pelo libero sul fondo, nella sezione a monte, il dislivello del fondo tra

la sezione a monte e quella a valle è definito dalla seguente formola:

$$\varDelta = \frac{c_1^2 - c^2}{2g} - \left(1 - \frac{c}{c_1}\right) \mathrm{H} ,$$

dove — al solito — g designa il valore dell'accelerazione di gravità.

Essa mi sembra notevole perchè permette molto semplicemente di dedurre il dislivello del fondo tra due sezioni qualsivogliano di un corso d'acqua (nelle condizioni specificate) mediante diretta misurazione dei soli elementi: H, c, c_1 e parmi atta a non difficile verifica sperimentale.

1. La giustificazione della precedente formola si appoggia sopra conseguenze elementari delle equazioni idromeccaniche e di uso famigliare agli idraulici. È infatti noto che in ogni punto di un liquido perfetto pesante animato da moto irrotazionale permanente *le tre quote verticali: effettiva, cinetica* e *piezometrica, hanno somma costante.*

Indichiamo con z la quota verticale ascendente, che conteremo a partire dal fondo della sezione a valle, con V il valore della velocità, con p quello della pressione specifica e con ϖ il peso dell'unità di volume del liquido in moto. L'espressione formale dell'enunciato precedente è allora la seguente:

$$z + \frac{\mathrm{V}^2}{2g} + \frac{p}{\varpi} = \text{costante},$$

valida in tutti i punti dello spazio occupato dalla massa liquida e precisamente, per quanto ci interessa, nella regione compresa tra le due sezioni a monte e a valle.

Chiamando p_{A} la pressione atmosferica, sul pelo libero si ha:

$$p = p_{\mathrm{A}} ;$$

se si tiene conto di ciò e del fatto che nei punti appartenenti al pelo libero della sezione a monte ($z = \mathrm{H} + \varDelta$) è per ipotesi $\mathrm{V} = c$, la costante del secondo membro della formola precedente, assume il valore

$$\mathrm{H} + \varDelta + \frac{c^2}{2g} + \frac{p_{\mathrm{A}}}{\varpi} ,$$

per cui la formola stessa può scriversi:

$$z - \mathrm{H} - \varDelta + \frac{\mathrm{V}^2 - c^2}{2g} + \frac{p - p_{\mathrm{A}}}{\varpi} = 0 .$$

In particolare nei punti del pelo libero, ove $p = p_{\mathrm{A}}$, si ha:

$$z - \mathrm{H} - \varDelta + \frac{\mathrm{V}^2 - c^2}{2g} = 0 .$$

Se H_1 designa la profondità del canale nella sezione a valle, avendosi ivi per ipotesi $V = c_1$ della precedente si ricava:

$$H_1 - H - \Delta + \frac{c_1^2 - c^2}{2g} = 0. \tag{1}$$

D'altra parte l'eguaglianza delle portate attraverso alle due sezioni a monte e a valle (data la costanza della densità e ammessa l'identità geometrica delle due sezioni) porta a stabilire la seguente relazione:

$$c_1 H_1 = cH. \tag{2}$$

Basta ora eliminare H_1 tra le due relazioni (1) e (2) per ottenere la formola annunciata.

Matematica. — *Sulle serie di potenze di una variabile sommate col metodo di Borel generalizzato.* Nota I di Gustavo Sannia, presentata dal Socio Enrico D'Ovidio.

1. In due recenti Note [1] ho trattato delle serie di potenze del tipo

$$u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \cdots + u_n z^n + \cdots, \tag{1}$$

interpretandole col nuovo *metodo di Borel generalizzato* [2], ed ho conseguito risultati di grande generalità e, spero, di qualche interesse.

Nella presente Nota ed in una successiva completerò la trattazione, rilevando ciò che chiamerò *sommabilità assoluta* (e di vario ordine) della (1) nella regione del piano complesso ove è sommabile, e dando poi, per la determinazione di questa regione, dei teoremi che fanno riscontro a quello di Cauchy-Hadamard sul raggio dell'ordinario cerchio di convergenza della serie.

Per comodità del lettore, premetterò un cenno di quei risultati che occorrono per il seguito.

2. Fissato un punto z, la (1) diventa una serie numerica, quindi (N. n. 1) è *sommabile* (B, r) (cioè *col metodo di Borel di ordine* r, ove r è un intero) se la serie

$$u^{(r)}(a, z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+r} z^{n+r} \frac{a^n}{n!} \qquad (u_{n+r} z^{n+r} = 0 \text{ se } n + r < 0) \tag{2}$$

[1] In corso di stampa negli Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino.

[2] Cfr. p. es. la mia Nota (che citerò con una N): *Generalizzazione del metodo di Borel per la sommazione delle serie* (questi Rendiconti, vol. XXVI, ser. 5ª, 1° sem., fasc. 11°).

è una trascendente intera, rispetto ad a, e l'integrale

$$\int_0^\infty e^{-a}\, u^{(r)}(a, z)\, da \qquad (a \geq 0) \tag{3}$$

è convergente.

Allora la *somma* $u(z)$ della serie è lo stesso integrale (3), aumentato però della somma dei primi r termini della serie se $r < 0$.

3. La (1) è sempre sommabile (B, r) (per ogni r) almeno in un punto: il punto $z = 0$ (¹). Ora se consideriamo una semiretta qualunque p uscente dal punto $O\,(z = 0)$, i punti z ove la (1) è sommabile (B, r) (per un r fissato) *costituiscono un segmento di origine* O (dal quale va forse escluso solo l'estremo), finito o non e che può anche eventualmente ridursi al punto O.

Variando p intorno ad O, si ha che il luogo dei punti del piano ove la (1) è sommabile (B, r) è una regione σ_r, semplicemente connessa, che può bene dirsi una *stella di centro* O (azla Mittag-Leffler). Vanno esclusi solo forse punti del contorno.

Essa contiene sempre l'ordinario cerchio di convergenza (²).

Variando l'intero r da $-\infty$ a $+\infty$, si ha una successione di metodi di Borel

$$\ldots\ldots, (B, -2), (B, -1), B, 0), (B, 2), (B, 1), \ldots\ldots, \tag{4}$$

quindi le *stelle di sommabilità* della (1) costituiscono una successione illimitata in due sensi

$$\ldots\ldots, \sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots\ldots \tag{5}$$

Esse sono tali che *ciascuna contiene la seguente* (³); perciò ammettono due *stelle-limite* σ e τ, per $r = -\infty$ ed $r = +\infty$, tali che σ *le contiene tutte* e τ *è in tutte contenuta* (⁴).

σ (a parte il contorno) è il luogo dei punti ove la (1) è sommabile con qualcuno dei metodi (4) o, come diremo, è *sommabile* Bg (cioè *col metodo di Borel generalizzato*) (⁵).

τ (a parte il contorno) è il luogo dei punti ove la (1) è sommabile con tutti i metodi (4) o, come diremo, è *sommabile* Bt (cioè *totalmente sommabile*).

(¹) Come in ogni punto ove è convergente (N, n. 2).

(²) Sul quale, si noti, non facciamo alcuna ipotesi, sicchè può anche ridursi al centro O.

(³) Perchè se una serie è sommabile (B, r), lo è anche $(B, r-1)$ (N, n. 2).

(⁴) Ma tuttavia contiene anch'essa il cerchio di convergenza (come le σ_r e σ).

(⁵) Ed è importante che nella stella σ si può (come nel cerchio di convergenza) operare sulla (1) con le regole ordinarie del Calcolo, algebrico e infinitesimale, e che queste operazioni si riflettono in altrettante analoghe operazioni sulla somma $u(z)$ della serie (Per tutto ciò, cfr. le Note citate in principio).

4. Quando in un punto z l'integrale (3) è convergente assolutamente, dirò che la serie (1) è *assolutamente sommabile* (B , r). Che se poi è tale per ogni valore dell'intero r, dirò che la (1) è *assolutamente sommabile* **B*t***.

Teorema. — *Nei punti interni in senso stretto alla stella* σ_r *la serie* (1) *è assolutamente sommabile* (B , $r-1$).

Per il centro O il teorema è evidente [1] poichè $u^{(r)}(a,0)$ vale zero se $r>0$ e $u_0 \dfrac{a^{-r}}{(-r)!}$ se $r \leq 0$, quindi (3) è assolutamente convergente per ogni r.

Consideriamo dunque un punto z di σ_r diverso da 0, e che non stia sul contorno. In esso la (1) è sommabile (B , r), quindi l'integrale (3) è convergente; ma poichè z è contenuto anche in σ_{r-1} (che contiene σ_r) sarà del pari convergente l'integrale

$$(6) \qquad \int_0^\infty e^{-a}\, u^{(r-1)}(a,z)\, da\,;$$

sicchè per giustificare l'enunciato, resta solo a dimostrare che lo è assolutamente.

Essendo

$$u^{(r-1)}(a,z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+r-1}\, z^{n+r-1} \frac{a^n}{n!} = z^{r-1} \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+r-1} \frac{(az)^n}{n!} = z^{r-1} u^{(r-1)}(az,1),$$

se si pone $z = \rho e^{i\theta}$ e poi $\rho a = b$, l'integrale (6) diventa, a meno di un fattore,

$$(7) \qquad \int_0^\infty e^{-\frac{b}{\rho}}\, u^{(r-1)}(be^{i\theta},1)\, db.$$

Intanto dalla convergenza dell'integrale (3) in z, segue che [2]

$$(8) \qquad \lim_{a=+\infty} e^{-a}\, u^{(r-1)}(a,z) = 0\,,$$

ossia

$$(9) \qquad \lim_{b=+\infty} e^{-\frac{b}{\rho}}\, u^{(r-1)}(be^{i\theta},1) = 0\,,$$

(1) E segue anche dal n. 5.

(2) Poichè $u^{(r)}(a,z)$ è la derivata di $u^{(r-1)}(a,z)$ rispetto ad a ed intanto sussiste il teorema: *Se $f'(a)$ è la derivata di una trascendente intera $f(a)$ ed esiste l'integrale di $e^{-a} f'(a)$ tra i limiti 0 e $+\infty$, esiste anche quello di $e^{-a} f(a)$ e si ha inoltre* $\lim_{a=+\infty} e^{-a} f(a) = 0$. Cfr. Bromwich, *An introduction to the theory of infinite series*, n. 101 (Macmillan and Co, London, 1908),

il che implica che la funzione di b

$$(10) \qquad |e^{-\frac{b}{\rho}} u^{(r-1)}(be^{i\theta}, 1)|$$

è limitata per $b \geqq 0$.

Poichè il punto z prefissato in σ_r non giace sul contorno, possiamo assumerne un secondo $z_0 = \rho_0 e^{i\theta}$ di uguale argomento e di modulo ρ_0 maggiore; e quanto abbiamo detto fin qui sussiste nel nuovo punto: in particolare, sarà limitata, per $\rho = \rho_0$, la funzione (10) di b, ossia esiste un numero $K > 0$ tale che sia

$$|e^{-\frac{b}{\rho_0}} u^{(r-1)}(be^{i\theta}, 1)| < K \qquad \text{per} \quad b \geqq 0,$$

da cui

$$|e^{-\frac{b}{\rho}} u^{(r-1)}(be^{i\theta}, 1)| < K e^{b\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho}\right)} \qquad \text{per} \quad b \geqq 0.$$

Essendo $\rho_0 > \rho$, è certamente convergente l'integrale rispetto a b tra i limiti 0 e $+\infty$ del secondo membro (¹), quindi è convergente *a fortiori* l'analogo integrale del primo membro, ossia l'integrale (7), è convergente assolutamente.

Cor. I. — *In ogni punto interno in senso stretto a σ_r la* (1) *è assolutamente sommabile* $(B, r-s)$ $(s = 1, 2, 3, \ldots)$

Poichè tal punto è anche interno in senso stretto a σ_{r-s+1}.

Cor. II. — *In ogni punto interno in senso stretto alla stella τ, la* (1) *è assolutamente sommabile* Bt.

Poichè tal punto è interno in senso stretto a ogni stella σ_r (²).

5. Le definizioni circa la sommabilità assoluta si applicano in particolare per $z = 1$, ossia ad una serie *numerica* qualunque

$$(11) \qquad u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

(¹) Vale $K : \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho}\right)$.

(²) Il Borel ha chiamato *assolutamente sommabile* (senz'altro) la serie (1) quando (3) è convergente assolutamente per ogni r *positivo o nullo*, ed ha considerata la regione del piano ove la (1) è assolutamente sommabile, chiamandola *poligono di sommabilità* (almeno nel caso in cui il raggio di convergenza della serie non è nullo).

Poichè, come risulta dalle definizioni, una serie assolutamente sommabile Bt è anche assolutamente sommabile (nel senso di Borel), e non viceversa in generale, si sarebbe indotti ad asserire che il poligono di sommabilità contiene la nostra stella τ. Invece ho dimostrato (nelle Note già citate in principio) che il poligono e la stella *coincidono*.

Così è facile dimostrare che: *una serie* (1) *assolutamente convergente è assolutamente sommabile* Bt (¹).

Poichè allora la serie $|u_0|+|u_1|+|u_2|+\cdots$ è convergente e quindi (N, n. 4) è sommabile Bt; sicchè per ogni r è convergente l'integrale

$$\int_0^\infty e^{-a} \sum_{n=0}^\infty |u_{n+r}| \frac{a^n}{n!}\, da$$

e quindi *a fortiori* l'integrale

$$\int_0^\infty e^{-a} \left| \sum_{n=0}^\infty u_{n+r} \frac{a^n}{n!} \right| da\,,$$

ossia la (11) è assolutamente sommabile (B , r) per ogni r.

(¹) Cioè più che assolutamente sommabile nel senso di Borel, come aveva dimostrato Hardy in Quarterly Journal of Math., vol. 35, 1903, pag. 22.

COMUNICAZIONI VARIE

Nell'adunanza delle due Classi del 19 gennaio 1918, il Segretario MILLOSEVICH presentò un piego suggellato, inviato dai signori: prof. V. GRANDIS, ing. C. CESARI e D. GARBARINO, per esser conservato negli archivi accademici.

Nella stessa seduta, il Socio prof. C. SOMIGLIANA offerse una copia del volume I, testè pubblicato sotto gli auspici della R. Accademia dei Lincei e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, delle *Opere di Alessandro Volta*. Il Socio Somigliana dette ampia notizia del volume predetto, mettendone in luce la importanza per esser tutto consacrato alla scoperta della pila, e ai documenti relativi alla scoperta stessa. La Commissione che diresse la edizione era composta dei senatori BLASERNA, CELORIA e VOLTERRA, e dei professori NACCARI, SOMIGLIANA e A. VOLTA junior (oggi defunto); il volume fu ordinato e curato dal dott. A. SOZZANI (defunto) e dal dott. L. VOLTA. Il Socio Somigliana chiuse la sua interessante comunicazione rilevando come l'opera ora pubblicata sia degna non solo del grande scienziato italiano che s'intende onorare, ma degna anche del momento attuale, nel quale le scoperte fondamentali, da cui derivarono incommensurabili benefici all'umanità, come è appunto quella della pila, devono essere bene illustrate e rigorosamente documentate.

L'intera Accademia ascoltò con intenso interesse la lucida esposizione del Socio Somigliana, che ebbe parte precipua nella pubblicazione, ed espresse l'augurio che il monumento eretto in onore del grande Comasco sia presto condotto a compimento.

E. M.